Autor: PhD. MsC. Bondor Cosmina-Ioana

Testarea ipotezelor

A ALWAYS
S SEEK
K KNOWLEDGE

Obiective

- Testarea ipotezelor
- Intervale de încredere
- Testul Student T
- Testul hi-pătrat
- Găsireatestului corect

Scenariu – Amputaţii

Toată populaţia, nu este nevoie de inferenţă

- Scopul studiului a fost de a evalua frecvența amputărilor datorate diabetului în România. Au fost analizate datele din toate spitalele din țară în 5 ani.

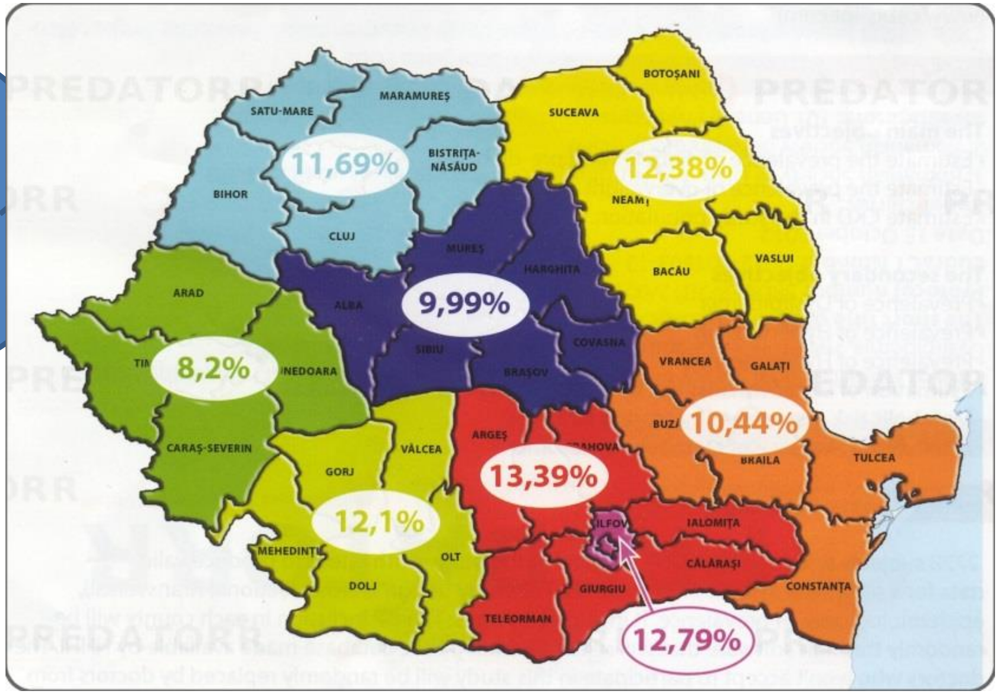
- Numărul total de amputări datorate diabetului zaharat a fost de 24.312, 70,3% cu diabet zaharat de tip 2.
- La fiecare 21 de minute există o amputare datorată diabetului

Veresiu IA, Iancu SS, Bondor C. Trends in diabetes-related lower extremities amputations in Romania—A five year nationwide evaluation. Diabetes Research and Clinical Practice. August 2015;109(2):293–8.

Scenariu – studiul Predatorr

- Scop: primul studiu de măsurare a prevalenței diabetului în România
- Metoda de eșantionare:
  - stratificat,
  - transversal,
  - clusterizat
  - Selecţie aleatorie.
- 2728 de participanți
- Prevalența diabetului a fost de 11,6%

Un eşantion, avem nevoie de inferenţă: intervale de încredere



Studiul Naţional privind Prevalenţa Diabetului, Prediabetului, Supraponderii, Obezităţii, Dislipidemiei, Hiperuricemiei şi Bolii Cronice de Rinichi (PREDATORR)
Mota M, Popa SG, Mota E, Mitrea A, Catrinoiu D, Cheta DM et al. Prevalence of diabetes mellitus and prediabetes in the adult Romanian population: PREDATORR study. Journal of Diabetes 2015; doi: 10.1111/1753-0407.12297

Exemplu

- Vrem să estimăm prevalența diabetului în România.
- Într-un studiu cu 2728 de participanți, frecvența diabetului zaharat 11,6%:

$f = 0{,}116$, Z_α=1,96

$$\left[0{,}116 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}116(1-0{,}116)}{2728}};\, 0{,}116 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}116+(1-0{,}116)}{2728}}\right]$$

$$[0{,}116 - 0{,}006; 0{,}116 + 0{,}006]$$

[0,110;0,122]
(frecvența diabetului în populația română va fi între 11%-12,2%)

$$[f - Z_\alpha\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}; f + Z_\alpha\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}]$$

Testarea ipotezelor

Scenariu: Tensiunea arterială sistolică medie (SBP) într-un eșantion reprezentativ de 81 de persoane din compania A este $\bar{X} = 125$ cu o deviație standard $s = 5$.

În populație, media SBP $\mu = 144$ și deviația standard $\sigma = 6$.

Există diferențe semnificative între SBP măsurată pe eșantion și SBP măsurată pe întreaga populație? (Eşantionul este extras din populaţie ?)

Compararea a două medii: test statistic

Testarea ipotezelor

Să presupunem că cele două medii $\bar{X}$ =125, μ=144 nu diferă semnificativ (dacă repetăm studiul media de pe eşantion ar putea să fie mai mare decât 144?)

Determinăm probabilitatea ca media SBP a persoanelor din compania A, aproximată de media 125 a eșantionului selectat, să fie de 144 mmHg (egală cu media populației)

Dacă probabilitatea este mare, atunci ipoteza este adevărată.

În caz contrar, dacă probabilitatea este mai mică de 1 din 20 (0,05), putem spune că media este diferită de media populației.

Pasul 1: Formularea ipotezelor

H0 - ipoteză nulă: nu există o diferență statistică semnificativă între media SBP de pe eșantion și media SBP din populație (diferența = 0)

H1 - ipoteză alternativă: există o diferență statistică semnificativă între media SBP de pe eșantion și media SBP din populație

Pasul 2 – Găsirea testului statistic potrivit

Alegem un test statistic

- distribuția normală,
- știm abaterea standard a populației
- eșantionul este mare (peste 30 de indivizi).

Alegem Testul Z pentru o singură medie:

$$z=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Pasul 2 – Găsirea testului statistic potrivit

- Ce comparăm? (medii, varianţe, procente ...)
- Cum este distribuția? (normală, binomială ...?)
- Cum sunt eşantioanele? (independente sau dependente?)
- Cum este dimensiunea eșantionului? (mică?)
- Cum sunt varianţele (egale sau ne-egale?)
- Câte eșantioane (una, două, trei sau multe?)

Cum sunt eşantioanele? (independente sau dependente?)

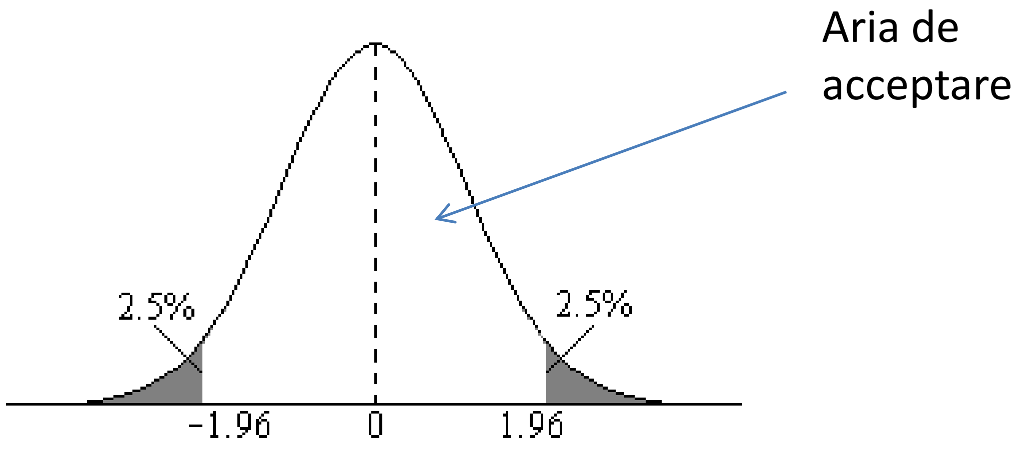
- **Eşantioane independente** (nu există nicio legătură între subiecții din cele două eșantioane)
- **Eșantioane dependente** (subiecții sunt perechi, fie după vârstă, fie după sex etc. sau aceeaşi subiecți au fost testați înainte și după ceva)

Pasul 3. Selectăm nivelul de semnificaţie al testului statistic

- α - nivelul de semnificație = probabilitatea respingerii incorecte a ipotezei nulă atunci când aceasta este de fapt adevărată
- **Cel mai des α = 0,05 (Z_{α}=1,96)**
- p este probabilitatea ca ipoteza nulă să fie adevărată.
- Dacă $p \leq \alpha$, respingem ipoteza nulă și spunem că testul este semnificativ

Pasul 4. Determinați valoarea pe care parametrul de testare trebuie să o atingă pentru a fi declarat semnificativ

- Z_α = **valoare critică** pentru un test statistic
- Zona de respingere - intervalul critic - zona în care H0 ar trebui respinsă
- Este diferită în funcție de distribuția testului și, uneori, de gradul de libertate



Testul two-tail (bilateral)

Pasul 5. Calcularea parametrului testului

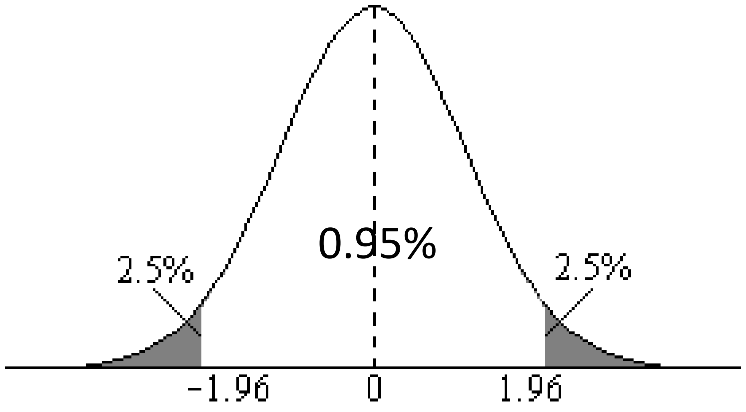
$$z=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{125-144}{6/\sqrt{81}}=-0,35$$

Pasul 6. Decizia şi concluzia

$(-Z_{\alpha}, Z_{\alpha})$ = (-1,96, 1,96) (α=0,05) – aria de acceptare a H0 (AUC = 95%)
Probabilitatea ca H0 să fie adevărată mai mare decâ α=0,05 – nu reuşim să respingem H_0

$(-\infty, -Z_{\alpha}] \cup [Z_{\alpha}, \infty)$ – aria de respingere (AUC = 5%)
Probabilitatea ca H0 să fie adevărată mai mică decât α=0,05 – acceptarea H_1

AUC – aria de sub curbă



Testul two-tail (bilateral)

Pasul 6. Decizia şi concluzia

Dacă $Z \in (-1{,}96,\ 1{,}96)$ nu reuşim să respingem H_0 ipoteza nulă (AUC > 5%)

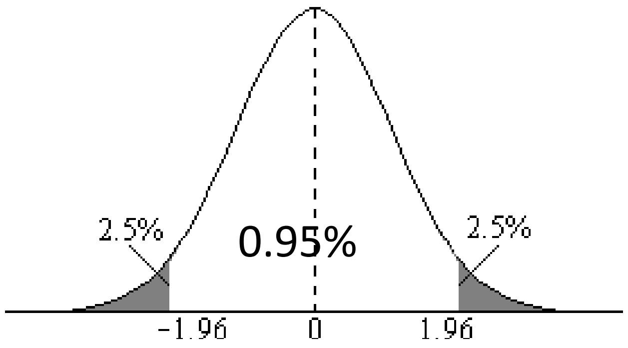
Dacă $Z \in (-\infty, -1{,}96] \cup [1{,}96, \infty)$ respingem ipoteza nulă H_0 (AUC ≤ 5%)

Sau pe baza probabilităţii

Dacă $p>0{,}05$ nu reuşim să respingem H_0 ipoteza nulă (AUC > 5%)

Dacă $p\leq 0{,}05$ respingem ipoteza nulă H_0 (AUC ≤ 5%)

AUC – aria de sub curbă



Testul two-tail (bilateral)

Pasul 6. Decizia şi concluzia

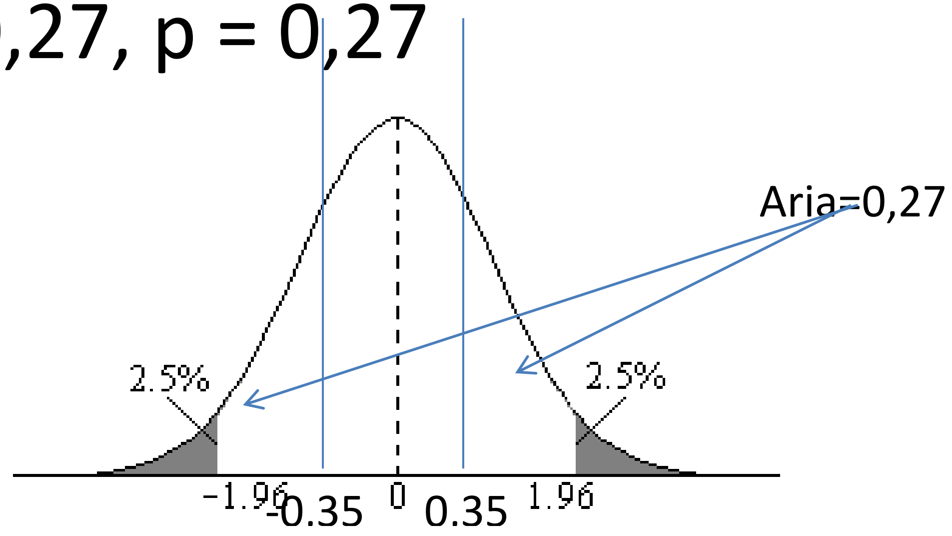
Dacă -1,96 <Z = -0,35 <1,96 nu reuşim să respingem H_0 ipoteza nulă

Nu există o diferență statistică semnificativă între media SBP de pe eșantion și media SBP din populație

Aria de sub curbă pentru z = -0,35 este 0,27, p = 0,27

~~Acceptăm ipoteza nulă~~

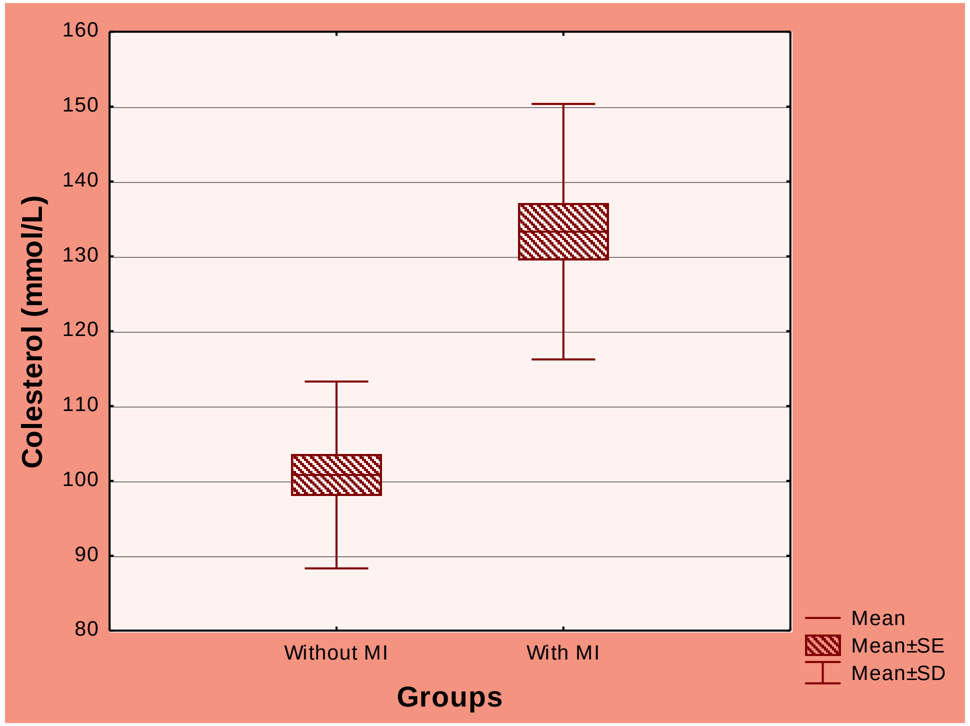
Nu reuşim să respingem H_0 ipoteza nulă



Testul two-tail (bilateral)

Scenariu

- Întrebare: La persoanele cu infarct miocardic, colesterolul mare este asociat cu repetarea infarctului miocardic?



- Selectăm aleator 40 de persoane.
- Colesterolul la pacienții **cu repetare** a infarctului miocardic (n_1=20): 133±17mmol/L ($\overline{X_1} \pm s_1$) medie±dev.st.
- Colesterolul la pacienții **fără repetare** a infarctului miocardic (n_2=20): 101±12mmol/L ($\overline{X_2} \pm s_2$)

Două eşantioane, este nevoie de inferenţă: test statistic

Compararea a două medii

Comparaţia între două medii

- Din populaţiile P_1 şi P_2 , având mediile (necunoscute) μ_1 respectiv μ_2, se extrag (aleator) două eşantioane cu n_1 respectiv n_2 indivizi pentru care se determină mediile $\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$ şi variaţiile s_1^2 şi s_2^2.
- Problema: comparăm mediilor μ_1 şi μ_2 prin compararea mediilor observate $\bar{X}_1$ si $\bar{X}_2$.

- două modele de comparaţie a mediilor:
  - **Pentru eşantioane independente**
  - Pentru eşantioane perechi (subiecţii sunt corespondenti – au anumite caracteristici la fel, precum varsta sau genul sau sunt aceeaşi pacienţi testaţi înainte şi după tratament).

Testul T (Student) pentru eşantioane independente cu varianţe egale) - de comparare a două medii

- Pas 1:
  - H0: nu există o diferenţă semnificativă între mediile colesterolului $\bar{X}_1$ si $\bar{X}_2$ pe cele două eşantioane
  - H1: există o diferenţă semnificativă între mediile colesterolului $\bar{X}_1$ si $\bar{X}_2$ pe cele două eşantioane
- Pas 2: Subiecţii din cele 2 eşantioane sunt independenţi
- asumpţii: distribuţia normală, varianţe egale
  - t-test pentru varianţe egale
- Pas 3: alegem α = 0,05,
- Pas 4: aria de respingere (-∞, $-t_\alpha] \cup [t_\alpha, \infty)$ = (-∞; $-2{,}02] \cup [2{,}02; \infty)$

  aria de acceptare : $(-t_\alpha, t_\alpha)$=(-2,02;2,02)

Principiu:

- dacă ipoteza nulă este acceptată, atunci cele două eşantioane provin din aceiaşi populaţie de medie μ.

Testul T (Student) pentru eşantioane independente cu varianţe egale

- Pas 5: calcularea parametrului testului şi a probabilităţii p:

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{N_1} + \frac{s_2^2}{N_2}}}$$

$$t = \frac{133-101}{\sqrt{\frac{17^2}{20}+\frac{12^2}{20}}} = \frac{32}{\sqrt{21,65}} = \frac{32}{4,65} = 6,88,$$ p=0,00000003

Testul T (Student) pentru eşantioane independente cu varianţe egale

- Pas 6: Concluzia pe baza parametrului t:
  - **t=6,88** $\in(-\infty; -\mathbf{2,02}] \cup [\mathbf{2,02}; \infty)$ respingem ipoteza nulă H0, acceptăm ipoteza alternativă H1: există o diferență semnificativă statistic între mediile colesterolului pentru pacienții cu și fără repetare a infarctului miocardic

Sau pe baza probabilităţii p

  - p=0,00000003 <0,05 respingem ipoteza nulă H0, acceptăm ipoteza alternativă H1: există o diferență semnificativă statistic între mediile colesterolului pentru pacienții cu și fără repetare a infarctului miocardic

Distribuţie normală?

Distribuţie normală

- Testul Shapiro-Wilk (eşantioane mici),

sau

- Testul Lilliefors (eşantioane mari),

sau

- Testul Kolmogorov-Smirnov (eşantioane mari)

Ca să testăm distribuţia aplicăm aceste teste, rezultatul lor nesemnificativ ($p \geq 0,05$) ne indică existenţa distribuţiei normale

Cazul eşantioanelor independente

Cum sunt varianţele?

- Două eşantioane independente
- Comparăm două varianţe

Testul Fisher pentru varianţe

sau

Testul Levene pentru varianţe

sau

Testul Bartlet pentru varianţe

Ca să testăm varianţele aplicăm aceste teste, rezultatul lor semnificativ ($p<0,05$) ne indică existenţa diferenţei dintre varianţe

Rezultat: varianţele sunt fie egale fie ne-egale

Dacă varianţele sunt egale, cum sunt mediile?

- Două eşantioane independente
- Comparăm două medii
- Varianţele sunt egale
- Distribuții sunt normale sau (n_1 şi n_2>30)

Test T (Student) în cazul varianţelor egale

Ca să testăm mediile aplicăm acest test, rezultatul lor semnificativ ($p<0,05$) ne indică existenţa diferenţei dintre medii

Dacă varianţele sunt egale, cum sunt mediile?

- Două eşantioane independente
- Comparăm două medii
- Varianţele sunt ne-egale
- Distribuții sunt normale sau (n_1 şi n_2>30)

Test T (Student) în cazul varianţelor ne-egale

Ca să testăm mediile aplicăm acest test, rezultatul semnificativ ($p<0,05$) ne indică existenţa diferenţei dintre medii

Dacă distribuţia nu este normală

- Două eşantioane independente
- Comparăm două medii
- Distribuția nu este normală (n_1 sau n_2<30)

Testul Mann-Whitney

Ca să testăm mediile rangurilor aplicăm acest test, rezultatul semnificativ (p<0,05) ne indică existenţa diferenţei dintre mediile rangurilor

Dacă >2 eşantioane?

- 3 sau >3 eşantioane independente
- 3 sau >3 medii de comparat
- Varianţe egale
- Distribuţie normală sau ($n_1>30$ şi $n_2>30$)

Anova test

- 3 sau >3 eşantioane independente
- 3 sau >3 medii de comparat
- Varianţe ne-egale sau distribuţie ne-normală şi ($n_1<30$ sau $n_2<30$)

Kruskal-Wallis test

Cazul eşantioanelor dependente

Dacă avem două eşantioane dependente?

- Două eşantioane dependente
- Comparăm două medii
- ($n_1 \geq 30$ şi $n_2 \geq 30$) sau distribuţia este normală

→ Testul T (Student) pentru eşantioane perechi

- Două eşantioane dependente
- Comparăm două medii
- ($n_1 < 30$ sau $n_2 < 30$) şi distribuţia nu este normală

→ Testul Wilcoxon rank sum pentru eşantioane perechi

Scenariu

- Din 3000 de pacienți cu artroplastie totală de şold (proteză), 125 au prezentat pierderea protezei. Din 125 cu pierderea protezei 50 sunt fumători. Din 3000 de pacienți, 1600 sunt nefumători.
- Întrebare: Oamenii care fumează sunt mai susceptibili de a pierde proteza de şold?

Două eşantioane, două proporții, necesită inferenţă: test statistic

Testul Hi-pătrat pentru independenţă

- Tabelul de contingenţă observat

	Cu pierderea protezei	Fără pierderea protezei	Total
Fumători	50	1350	1400
Ne-fumători	75	1525	1600
Total	125	2875	3000

- Pierderea protezei:

- 50/1400 = 3,57% pentru fumători

- 75/1600 = 4,68% pentru nefumători

Testul Hi-pătrat pentru independenţă

- Pas 1:
  - H0 – ipoteza nulă: fumatul și pierderea protezei totale de şold sunt independente (nu sunt asociate)
  - H1 – ipoteza alternativă: fumatul și pierderea protezei totale de şold sunt dependente (sunt asociate)
- Pas 2: Alegem testul Hi-pătrat pentru independenţă, deoarece avem 2 sau >2 proporţii, frecvenţele teoretice>5
- Pas 3: Alegerea α = 0,05,
- Pas 4: Aria de respingere $[\chi_\alpha; \infty)$ = $[3{,}84; \infty)$

  Aria de acceptare: (0; χ_α) = (0; 3,84)

Testul Hi-pătrat pentru independenţă

- Pas 5: calculați tabelul de contingență teoretic cu frecvențele teoretice (tabelul în care fumatul nu este asociat cu pierderea protezei de şold):

	Cu pierderea protezei	**Fără pierderea protezei**	**Total**
Fumători	$=\frac{125 \cdot 1400}{3000}=58$	$=\frac{2875 \cdot 1400}{3000}=1342$	1400
Nefumători	$=\frac{125 \cdot 1600}{3000}=67$	$=\frac{2875 \cdot 1600}{3000}=1533$	1600
Total	125	2875	3000

Testul Hi-pătrat pentru independenţă

- $\chi = \sum_{i=1}^{4} \frac{(f_i{}^o - f_i{}^t)^2}{f_i{}^t} =$

$$= \frac{(50-58)^2}{58} + \frac{(1350-1342)^2}{1342} + \frac{(75-67)^2}{67} + \frac{(1525-1533)^2}{1533} =$$

$$= 1{,}19 + 0{,}05 + 1{,}04 + 0{,}05 = 2{,}33$$

- p=0,13

Testul Hi-pătrat pentru independenţă

- Pas 6: Concluzia pe baza parametrului testului
  - $\chi \in [0; 3,84)$ nu am reuşit să respingem ipoteza nulă: fumatul şi pierderea protezei de şold sunt independente (nu se asociază)

Sau pe baza probabilităţii

- **p=0,33>0,05** nu am reuşit să respingem ipoteza nulă: fumatul şi pierderea protezei de şold sunt independente (nu se asociază)

Dacă eşantioanele nu sunt independente?

- 2 sau >2 proporţii
- 2 sau > eşantioane dependente

→ Testul Mc Nemar

- 2 sau >2 proportions
- 2 sau > eşantioane independente
- Frecvenţele teoretice <5

→ Testul Fisher exact

Intervale de confidenţă sau teste statistice?

- Intervalul de încredere:
  - arată variabilitatea estimatorului dacă repetăm studiul
  - ne spune mai mult decât ce spune p
  - este de dorit dacă suntem interesați de variația mediei, nu numai dacă o medie este mai mică decât cealaltă
  - arată efectul exact a dimensiunii mici n a eşantionului (intervalul de încredere este foarte larg = imprecis)

Mulţumesc!!!